

弾性支持されたはりおよび円板の非線形振動に関する研究

著者	森 和男
号	748
発行年	1979
URL	http://hdl.handle.net/10097/9484

氏 名	もり 森	かず 和	お 男
授 与 学 位	工 学	博 士	
学位 授 与 年 月 日	昭和 5 5 年 3 月 2 5 日		
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 1 項		
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 (博士課程) 機械工学専攻		
学 位 論 文 題 目	弾性支持されたはりおよび円板の非線形振動に関する研究		
指 導 教 官	東北大学教授 斎藤 秀雄		
論 文 審 査 委 員	東北大学教授 斎藤 秀雄	東北大学教授 玉手 統	
	東北大学教授 渥美 光	東北大学教授 八巻 昇	

論 文 内 容 要 旨

第 1 章 序 論

近年機械や構造物はますます高速化，軽量化，複雑化し，さらに新素材の採用，厳しい動的荷重条件下での使用が増えるにつれて多くの非線形振動問題が発生している。機械，構造物を構成する要素としてはりや円板は最も基本的なものであり，そのためそれらの非線形振動における特性を解明することは，はりおよび円板自体の動特性を知るためばかりでなく，機械や構造物全体の動的挙動を把握する上からも重要な問題である。

はりおよび円板の非線形振動問題に関する研究は既に数多く報告されているが，それらの大部分は境界が固定あるいは単純支持された場合を取り扱っている。しかし実際には境界における支持部も弾性体であることが多いから，この影響を考慮する方が現実に近い。支持部の弾性を考慮してはりの非線形振動を取り扱った報告としては，端部が軸方向に弾性拘束される場合を解析した J. D. Ray と C. W. Bert¹⁾，J. A. Bennett と J. G. Eisley²⁾ および A. H. Nayfeh³⁾ らの研究がある。また，J. Ramachandran⁴⁾ は外周が線形弾性支持された円板の大たわみ自由振動を取り扱っている。しかし，はりおよび円板について一般的な弾性支持条件を適用して解析した報告は未だ見あたらないようである。

さて以上の研究においては，非線形要因は何れもはりや円板のたわみに起因する力および変形によって生じており，端部は線形復原力を有する弾性支持部の場合のみを取り扱っている。しか

し最近構造物は一層複雑化し、さらに過酷な荷重条件下において使用される機械が増えるにつれて弾性支持部が非線形特性を示す場合も多く、この影響を考慮に入れて動的挙動を解明する必要性が増大している。このため B. Porter と R. A. Billett⁵⁾並びに M. A. Dokainish と R. Kumar⁶⁾は一端固定、他端が非線形弾性支持されたはりの縦振動、および横振動を報告している。しかし一般的な非線形弾性支持端を有するはりおよび円板の横振動を取り扱った報告は未だ見受けられないようである。

一方、はりや円板は単独で工業部材として用いられることも多いが、付加重量物が取り付けられる場合も数多く見受けられ、この影響を考慮に入れることは工学上有益なことと思われる。

本研究はこれらの現状に鑑み、第一に非線形復原力を有する弾性支持部によって端部を拘束され、かつ付加質量を有するはりおよび円板の横振動を取り扱い、第二に線形復原力を有する弾性支持部によって外周が拘束され、中心に集中質量を有する円板並びに内周に剛体質量が取り付けられた環状板の軸対称大たわみ振動を解析し、動特性に及ぼす弾性支持並びに質量の影響を明らかにしようとするものである。さらに外周が線形弾性支持され、内周に剛体質量を有する環状板の軸対称並びに逆対称線形自由振動を解析し、自由振動数に及ぼす弾性支持および質量の影響に対しても詳細な検討を行う。

第 2 章 非線形弾性支持端を有するはりの横振動

弾性支持されたはりの非線形振動問題の多くは、大たわみに伴う引張軸力による非線形性のみを考慮して取り扱われている。しかし実際には弾性支持部が非線形特性を示すことも多く、そのような場合ははりの運動方程式が線形方程式で表わされるとしても、支持部の非線形性によっては線形応答と異なった応答を示す。

本章では、両端が非線形弾性支持部によって拘束され、かつスパン上任意点に集中質量と集中荷重が作用するはりの横振動を解析している。はりの運動方程式は線形理論より求め、集中質量並びに集中荷重はディラックのデルタ関数を用いて運動方程式に含めて考える。非線形弾性支持部は線形復原力の他に 3 次の非線形復原力を含むものとし、これを回転ばねと直線ばねの組み合わせで表わす。基本調波の他に 3 次高調波並びに $\frac{1}{2}$ 次分数調波も含めた定常解を考え、これを非線形境界条件に代入して調和バランス法を適用し、その結果得られる未定定数に関する連立 3 次代数方程式を Newton-Raphson 法を用いて解く。数値計算では二種の支持条件を取り上げてこれらの自由並びに強制振動における動特性を求め、非線形弾性支持部の影響を明らかにする。

第 3 章 非線形弾性支持縁を有する円板の横振動

本章では、非線形弾性支持部によって周辺を拘束され、中心に集中質量と集中荷重の作用する弾性円板の軸対称横振動を取り扱っている。非線形弾性支持部は線形復原力の他に 3 次の非線形復原力を含む回転ばね、並びに直線ばねに置き換えて考える。円板の運動方程式は線形理論より求め、非線形弾性支持部、集中質量および集中荷重は円板の境界条件において考慮する。解析においては、3 次高調波並びに $\frac{1}{2}$ 次分数調波も含めた定常解を考え、これを非線形境界条件に代入

して調和バランス法を適用し、定常解に含まれる未定定数についての代数方程式を導く。次いで二種の支持条件に対して代数方程式をNewton-Raphson 法によって数値的に解き、円板の自由並びに強制振動の応答を求めて動的挙動に及ぼす非線形弾性支持部、および集中質量の影響を考察する。

第 4 章 剛体質量を有し、外周が弾性支持された環状板の線形自由振動

本章では、外周が線形復原力を有する直線ばねおよび回転ばねによって支持され、中心に同心円状の剛体質量が取り付けられた環状板の自由振動を解析している。特に剛体質量が運動を行う場合の環状板の横振動、つまり軸対称並びに逆対称振動に着目して振動数方程式を厳密に導出する。数値計算では、剛体質量およびばね定数に対する固有値の変化を求め、線形自由振動数に及ぼす弾性支持並びに剛体質量の影響を明らかにする。

第 5 章 中心に集中質量を有し、外周が弾性支持された円板の大たわみ振動

薄板構造が機械や構造物に広く用いられるにつれて振幅が板厚に比して無視できない振動、いわゆる大たわみ振動が問題となっている。本章では、外周が弾性支持され、中心に集中質量を有する弾性円板の軸対称大たわみ振動を取り扱う。弾性支持部は線形復原力を有する直線ばね、回転ばねおよび半径方向ばねで表わす。半径方向の拘束状態を精度良く求めるために運動方程式として von Kármán の式を用い、集中質量はディラックのデルタ関数を用いて運動方程式に含めて考える。解析では円板を多自由度系とみなして座標関数に簡単な級数を仮定し、ガレルキン法を適用して時間関数についての非線形常微分方程式を求める。次いで円板の動的挙動の把握を一層容易にするため時間関数を線形自由振動の基準座標に変換し、調和バランス法を適用して 3 次高調波並びに $1/3$ 次分数調波を考慮して定常解を求める。数値計算では円板を 3 自由度に限定して自由並びに強制振動の挙動を求め、円板の大たわみ振動特性に及ぼす質量および弾性支持の影響、特に半径方向ばねの影響を検討している。

第 6 章 剛体質量を有し、外周が弾性支持された環状板の大たわみ振動

前章では集中質量を有する円板を取り扱ったが、付加重量物の半径が大きく集中質量と見なせない場合も多い。また板の剛性に対して付加重量物の剛性が十分高い場合は、重量物を剛体として取り扱うことができる。本章においては、線形復原力を有する直線ばね、回転ばねおよび半径方向ばねによって外周を弾性支持され、内周に同心円状の剛体質量を有する環状板の軸対称大たわみ振動を論じる。運動方程式として von Kármán の式を用い、取り扱いを容易にするため剛体の質量および剛体より環状板に作用する強制力を環状板内周に一様に分布する線質量並びに線荷重に置き換え、これらを運動方程式に含めて取り扱う。解析においては環状板を多自由度とみなして座標関数に簡単な級数を仮定し、以下第 5 章と同様な手順に従って定常解を求める。数値計算では環状板を 3 自由度に限定して自由並びに強制振動の挙動を求め、環状板の動的挙動に及ぼす弾性支持の影響を明らかにする。

第7章 結 論

端部が弾性支持され、付加質量が取り付けられたはりおよび円板の非線形振動問題について理論解析を行った。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 線形復原力の他に3次の非線形復原力を有する弾性支持部によって境界が拘束され、スパン上任意点に集中質量と集中荷重が作用するはり並びに中心に集中質量と集中荷重の作用する円板の横振動を解析した。二種の支持条件を取り上げて低次モード範囲内における自由並びに強制振動の応答を求め、それらに及ぼす弾性支持部の非線形性および集中質量の影響を明らかにした。運動方程式が線形理論に従うものであっても、弾性支持部の非線形性は自由振動および強制振動における共振状態や大振幅域での挙動に大きな影響を与え、線形応答とは非常に異なったものとなる。また付加質量の影響も大きく、支持部の非線形性によるモード連成を生じさせる場合もあることが明らかになった。

(2) 外周が線形弾性支持され、内周に剛体質量が取り付けられた環状板の軸対称並びに逆対称線形自由振動に及ぼす弾性支持部および剛体質量の影響を明らかにした。線形固有振動数に及ぼす影響は回転ばねより直線ばねの方が大きく、また1次固有振動数は剛体の質量あるいは慣性モーメントが増加すると弾性支持の影響を受けにくくなることが判明した。

(3) 外周が線形弾性支持され、中心に集中質量を有する円板並びに内周に剛体質量が取り付けられた環状板の軸対称たわみ振動を解析した。低次モード範囲内における自由並びに強制振動の応答を求め、それらに及ぼす弾性支持や質量の影響を明らかにした。半径方向ばねによる拘束は応答の非線形性を著しく強め、モード連成を生じさせる場合がある。さらに直線ばねに対する応答は非常に複雑に変化することもある。また1次モードに2次モードの連成が見られる場合、連成部分は質量の増加に伴い大振幅域へ移行する。

参 考 文 献

- [1] J. D. Ray and C. W. Bert, J. Eng. Ind., 91 (1969), 997.
- [2] J. A. Bennett and J. G. Eisley, AIAA, 8 (1970), 734.
- [3] A. H. Nayfeh, J. Acous. Soc. Amer., 53 (1973), 766.
- [4] J. Ramachandran, J. Acous. Soc. Amer., 55 (1974), 880.
- [5] B. Porter and R. A. Billett, Int. J. Mech. Sci., 7 (1965), 431.
- [6] M. A. Dokainish and R. Kumar, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 98 (1972), 1381.

審 査 結 果 の 要 旨

近時機械および構造物はますます高速化，軽量化され，さらに厳しい動的荷重下において使用されつつある。このような状況においては，微少変形の仮定のもとでは律し切れない複雑な非線形振動現象を発生する。これらのことに関しては既に多数の研究が行われているが，解析が複雑であるため多くの未知の問題が残されている。著者は，これらの一つとして，弾性支持されたはりおよび円板の非線形振動の問題を取り上げ，はりおよび板のたわみは小であるが，非線形復原力を含む弾性支持部によって拘束される場合と，支持部の復原力は線形であるが，はりおよび板のたわみは大である場合の二つに分けて詳細に究明した。本論文はその成果をまとめたもので全編 7 章よりなる。

第 1 章は序論であり，従来の研究と本研究の意義および目的について述べている。

第 2 章では 3 次の非線形復原力を含む弾性支持部で端を拘束され，かつ付加質量を有するはりの自由並びに強制振動を，はりには線形運動方程式を適用して解析している。これより系の背骨曲線，共振点付近における振幅の変化および振動波形を詳細に説明し，特に硬性支持部の場合には，高次モードほど非線形性が強く表われることを明らかにしている。

第 3 章では周辺を 3 次の非線形復原力を含む弾性支持部によって拘束され，中心に集中質量を有する弾性円板の軸対称振動を取り扱っている。支持部の非線形性は円板の境界条件において考慮し，分数調波および高調波を含む定常解を与えている。これより支持部の非線形性および付加質量は，系の自由並びに強制振動に大きな影響を与え，振幅が大となると，異種モード間の連成をも生じることを見出している。これらは重要な知見である。

第 4 章では内周に円形剛体質量を取り付けられた弾性支持円板の軸対称並びに逆対称線形自由振動を解析し，支持部ばね定数に対する固有値の変化を詳細に求めている。特に付加剛体の質量および直径回りの慣性モーメントの特定の値において，円板振動が増大することを指摘していることは有益な成果である。

第 5 および第 6 章では内部に中心集中質量および円形剛体質量を有する弾性支持円板の軸対称大たわみ振動を，支持部を直線，回転，および半径方向の三つの分布ばねに，さらに円板は多自由度系に置きかえて解を求めている。これより半径方向ばねのこわさの増加と共に円板の応答は著しく非線形性を増大し，1 次モードの振幅域において 2 次モードの連成をも生ずる場合のあることを明らかにしている。

第 7 章は結論である。

以上要するに，本論文は弾性支持されたはりおよび円板の非線形振動を詳細に解明し，振動特性に及ぼす支持部の影響を明らかにしたものであって，振動工学並びに機械工学に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。